EESA N° 1 - **Matemática**
Curso: 6°
Prof. Mariana Sudday
TP N° 11 Derivadas.
Fecha de entrega: 4 de noviembre.

Pensar estas situaciones:

El conductor de una máquina cortadora de arroz desea conocer su velocidad de corte en un momento determinado (la razón de la velocidad respecto al tiempo)

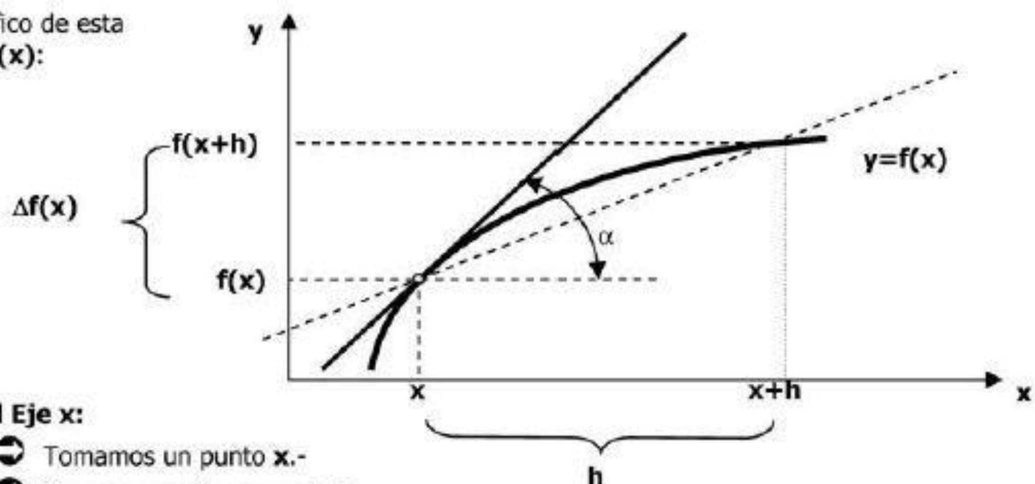
Un obrero agrícola desea saber la rapidez con que se esparce una plaga en un cultivo el cual depende de la cantidad de factores ambientales que intervienen y la manera que reaccionen las plantas ante la plaga.

Y el ingeniero agrónomo, desea saber la calidad de un cultivo el que depende de la cantidad y tipo de fertilizante que se le aporta a la tierra, y la frecuencia de agua que se le proporciona al cultivo en la primera etapa.

Todas estas razones de cambio son casos especiales de una idea matemática: LA DERIVADA.

Qué es la Derivada de una función en un punto? El valor de la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a esa función en ese punto.

Mirá bien el gráfico de esta función **f(x)**:



En el Eje x:

- Tomamos un punto **x**.-
- Marcamos un incremento **h**.-
- Y nos queda determinado el punto **x+h**.-

Experimento:

- Achiquemos el incremento **h** hasta que sea casi imperceptible...
- ... llega un punto que h es tan chico, que la línea que une f(x) y f(x+h) toca a la curva en un solo punto, o *sea, se hace tangente a la curva*

Ahora la pregunta es ¿Cuánto vale numéricamente la pendiente **a** la recta tangente en un punto x?
La pendiente es la razón entre el incremento vertical y el incremento horizontal. Por lo tanto esa es la pendiente de la curva en el punto "x", es decir ese cociente de incrementos:

$$\frac{\Delta\, Vertical}{\Delta\, Horizontal} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Longrightarrow$$

Esto se denomina COCIENTE INCREMENTAL

¿Viste que recién experimentamos "achicando" la **h** ? bueno, esto en Matemática se expresa así: $\lim\limits_{h \to 0}$

y como lo que queremos calcular es la pendiente de la curva, calculamos el límite para h tendiendo a cero de ese famoso cociente incremental.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \Longrightarrow$$

Y esta es la definición de derivada de f(x) en el punto x

✔ **Derivada de f(x)** se escribe "con un tilde" **f ' (x)**

- Derivadas por definición: La manera de calcular una derivada por definición es un poco "engorrosa" pero es necesario saberlo hacer para entender bien el significado de la definición de derivadas.

Calculemos entonces, a modo de ejemplo, la derivada de $\mathbf{f(x)=x^2}$ en $\mathbf{x=1}$
Primero calculamos la derivada de g(x) para cualquier valor de x:
Para eso, partimos de la fórmula de definición de derivadas:

Si $f(x) = x^2$, entonces $f(x+h) = (x+h)^2$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Desarrollamos el cuadrado del binomio:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2 \cdot x \cdot h + h^2 - \cancel{x^2}}{h} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot x \cdot h + h^2}{h}$$

... ahora sacamos factor común **h** en el numerador...

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \cdot (2 \cdot x + h)}{\cancel{h}} \Rightarrow \lim_{h \to 0} 2 \cdot x + h = 2 . X + 0 = \boxed{2X} \Longrightarrow \boxed{f'(x) = 2x}$$

O sea que la derivada de $\mathbf{x^2}$ es **2.x**
la derivada de $\mathbf{x^2}$ evaluada en el punto **x=1** sería:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x \Rightarrow \boxed{f'(1) = 2 \cdot 1 = 2}$$

....Y así podría calcular la derivada de $f(x)=X^2$ en cualquier punto, una vez que ya tengo la fórmula general, lo único que me faltaría es reemplazar la "X" de la fórmula de derivada f'(x) = 2X por el valor en el cual quiero conocer la derivada, y listo...

- Reglas de Derivación: El desarrollo de toda la Teoría del Cálculo Infinitesimal (o sea el que incluye a las derivadas) fue presumiblemente llevado a cabo hacia 1684 por Newton (sí, el mismo de las fórmulas de física de cinemática) y Leibnitz... (en realidad todavía no se sabe bien quién de los dos la ideó primero). Como el cálculo de las derivadas tal como lo hicimos con $\mathbf{x^2}$ es más bien pesado, se idearon reglas de derivación, destinadas a hacernos los cálculos un poco más fáciles...

Ahora vamos a ver esas "reglas de derivación"

- REGLAS DE DERIVACIÓN

  - **Función Constante**: $f_{(x)} = \mathrm{k} \quad \Rightarrow \quad f'_{(x)} = 0$

    Ejemplo: $f_{(x)} = 4 \Rightarrow f'_{(x)} = 0$

    > O sea que la derivada de "cualquier número, o función constante" es cero

  - **Función Potencial:** $f_{(x)} = \mathrm{x}^{n} \quad \Rightarrow \quad f'_{(x)} = n \cdot \mathrm{x}^{n-1}$

    Ejemplos: $f_{(x)} = \mathrm{x}^{18} \Rightarrow f'_{(x)} = 18 \cdot \mathrm{x}^{18-1} = 18 \cdot \mathrm{x}^{17}$

    $f_{(x)} = \mathrm{x}^{-5} \Rightarrow f'_{(x)} = (-5) \cdot \mathrm{x}^{-5-1} = (-5) \cdot \mathrm{x}^{-6}$

    > O sea que para calcular la derivada de una función cuya variable **x** está elevada a un exponente "n" es el producto de "n" por "x" elevada al exponente "**n-1**"

  - **Radicales (índice = 2):** $f_{(x)} = \sqrt{\mathrm{x}} \Rightarrow f'_{(x)} = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{\mathrm{x}}}$

  - **Funciones Trigonométricas:** $f_{(x)} = \mathrm{Sen}(x) \Rightarrow f'_{(x)} = Cos(x)$

    $f_{(x)} = Cos(x) \Rightarrow f'_{(x)} = -Sen(x)$

  - **Logaritmo Neperiano:** $f_{(x)} = \ln(x) \Rightarrow f'_{(x)} = \dfrac{1}{x}$

  - **Función exponencial:** $f_{(x)} = a^{x} \Rightarrow f'_{(x)} = a^{x} \cdot \ln \mathrm{a}$

  - **Caso especial de Función Exponencial:** $f_{(x)} = e^{x}$

$$f_{(x)} = e^{x} \Rightarrow f'_{(x)} = e^{x} \cdot \ln \mathrm{e} \Rightarrow f'_{(x)} = e^{x}$$

> - **<u>Derivada de la Suma de Funciones:</u>** La derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de dichas funciones

Ejemplo: Calculemos la derivada de: $f_{(x)} = \ln(x) + \sqrt{x} + Sen(x)$

Veamos: $f(x) = \ln(x) + \sqrt{x} + Sen(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \underbrace{(\ln(x))'}_{\frac{1}{x}} + \underbrace{(\sqrt{x})'}_{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}} + \underbrace{(Sen(x))'}_{Cos(x)}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + Cos(x)}$$

➤ **Hallar la función derivada de:**

1) $f(x) = X^3$
2) $f(x) = X^5$
3) $f(x) = 2\,X^4$
4) $f(x) = -\,X^4$
5) $f(x) = \text{Sen}\,X$
6) $f(x) = 3\,\text{Cos}\,X$
7) $f(x) = 2\,\text{Ln}\,x$
8) $f(x) = 3\,X^4 + 2\,X$
9) $f(x) = X^3 - 3\,X^2 + 2\,X - 5$
10) $f(x) = \text{Sen}(x) - 3$
11) $f(x) = 2 - \text{Cos}\,(x)$
12) $f(x) = 5\,\text{Ln}\,(x) + \text{Cos}\,(x) - 3$
13) $f(x) = 5\,(x)^2 + (5x)^2$
14) $f(x) = e^x + 2\,\text{Cos}\,(x)$

Cualquier duda me consultan.

TODOS LOS TRABAJOS SE ENTREGAN AL MAIL:
mariana_sudday@hotmail.com