Matemáticas quinto año
Prof Diego Tubio
Fecha de entrega 20/5/20
Forma de entrega Whatsapp o correo electrónico. diegotj2001@yahoo.com.ar

Guía de ejercicios resueltos. (la ultima hora tiene las actividades)

TEORíA 1

FUNCIONES POLINÓMICAS

Las funciones polinómicas asociadas a los polinomios en una indeterminada x son expresiones de la forma:

$$f(x)=a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

- Todas las funciones polinómicas son continuas en el conjunto de los números reales.
- Los contactos entre el gráfico de la función polinómica y el eje x son las raíces del polinomio asociado o los ceros de la función.
- Si el grado de multiplicidad de la raíz de un polinomio es par, al tomar x el valor de la raíz, el gráfico de la función asociada al polinomio es tangente al eje de abscisas. Si el grado de multiplicidad es impar, el gráfico atraviesa el eje de abscisas.
- Conjunto de positividad: son los valores de x para los cuales la función es positiva.
- Conjunto de negatividad: son los valores de x para los cuales la función es negativa.

Teorema de Bolzano- Weierstrass

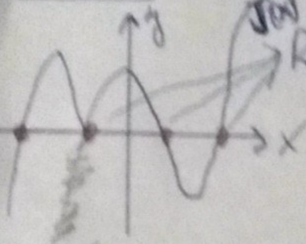
- Enunciado. Si una función es continua en un intervalo y tiene distinto signo en los extremos del mismo, entonces la función tiene por los menos una raíz real en ese intervalo.
- Consecuencia: como toda función polinómica es continua, se cumple, que entre dos raíces consecutivas, los valores que toma la función son todos positivos o todos negativos.

EJERCICIOS RESUELTOS

GRAFICAR INDICANDO RAÍCES, MULTIPLICIDAD DE LAS RAÍCES, ORDENADA, CAMPOS DE POSITIVIDAD (C^+), CAMPOS DE NEGATIVIDAD (C^-) Y CAMPOS DE CEROS (C^0)

A) $J(x) = -x^3 + 7x^2 - 15x + 9$

RAÍCES: SON LOS PUNTOS DONDE LA FUNCIÓN VALE "CERO"



RAÍCES GRÁFICAMENTE SON LOS PUNTOS DONDE LA FUNCIÓN CORTA O REBOTA SOBRE EL EJE "X" (SE LOS MARQUÉ EN ROJO).

¿CÓMO ENCUENTRO ANALÍTICAMENTE LAS RAÍCES?
DEBO IGUALAR LA ECUACIÓN A CERO Y TRATAR DE HALLAR LOS VALORES QUE SATISFACEN LA ECUACIÓN.

$$-x^3 + 7x^2 - 15x + 9 = 0$$

$(x-3)$	-1	7	-15	9
3		-3	12	-9
$(x-3)$	-1	4	-3	0
3		-3	3	
	-1	1	0	

$(-x+1)$

$$(x-3)^2 \cdot (-x+1)^1 = 0$$

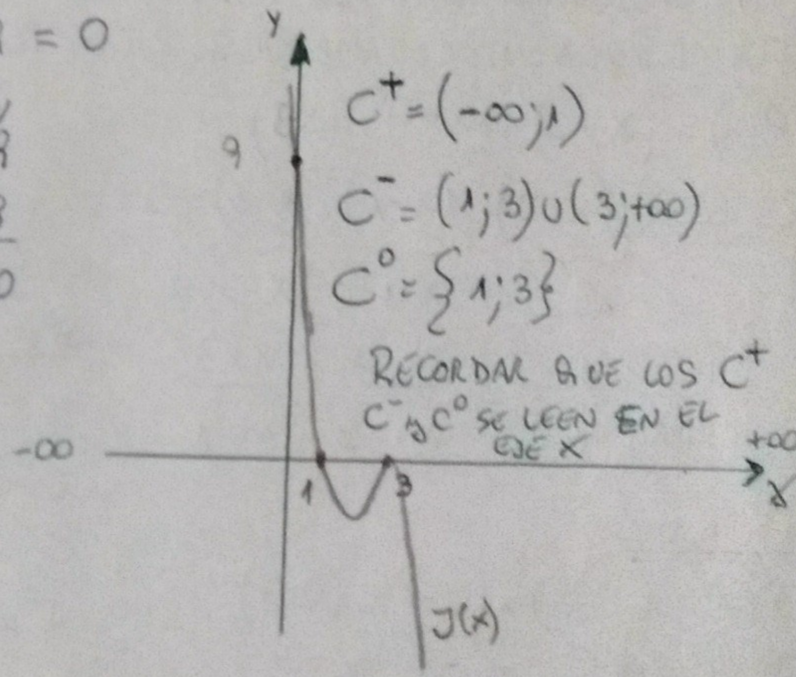
$x-3=0$ | $-x+1=0$

RAÍCES: $\boxed{x=3}$ $\boxed{1=x}$

MULTIPLICIDAD

$m = 2$ $m = 1$

ES EL GRADO AL CUAL SE ENCUENTRA ELEVADO LA RAÍZ. SI ES UN NÚMERO PAR LA FUNCIÓN REBOTA SOBRE EL EJE "X". SI ES UN NÚMERO IMPAR LA FUNCIÓN CORTA AL EJE "X"



$C^+ = (-\infty; 1)$

$C^- = (1; 3) \cup (3; +\infty)$

$C^0 = \{1; 3\}$

RECORDAR QUE LOS C^+ C^- y C^0 SE LEEN EN EL EJE X

ORDENADA: ES EL PUNTO DONDE LA FUNCIÓN CORTA AL EJE "Y". SE LA OBTIENE REEMPLAZANDO A LA X POR UN CERO EN LA FUNCIÓN. $J(0) = -0^3 + 7 \cdot 0^2 - 15 \cdot 0 + 9 = 9$

B) $N(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

$(x-1)$	1	1	-5	3
1		1	2	-3
$(x-1)$	1	2	-3	0
1		1	3	
	1	3	0	

$(x+3)$

RAÍCES $x^3+x^2-5x+3=0$

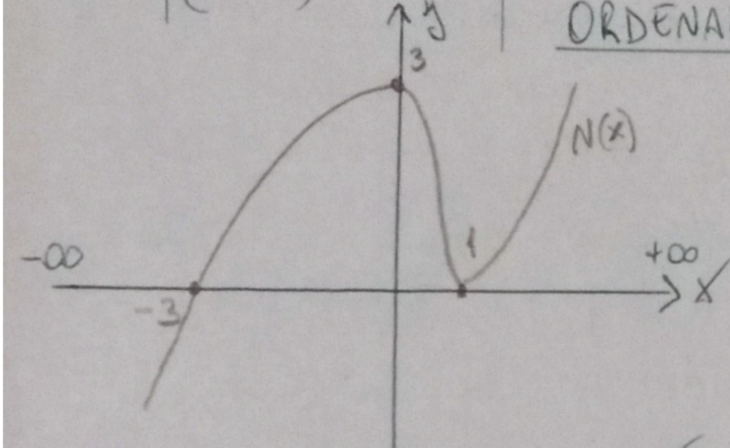
$(x-1)^2 \cdot (x+3) = 0$

$x-1=0$; $x+3=0$

RAÍCES → $\boxed{x=1}$; $\boxed{x=-3}$

MULTIPLICIDAD $m=2$; $m=1$

ORDENADA $= N(0) = 0^3+0^2-5.0+3 = \boxed{3}$



$C^+ = (-3;1) \cup (1;+\infty)$

$C^- = (-\infty;-3)$

$C^0 = \{-3;1\}$

C) NO NECESARIAMENTE LA FUNCIÓN VA A ESTAR EXPRESADA EN FORMA POLINÓMICA. TAMBIÉN SE PUEDE PRESENTAR EN FORMA FACTORIZADA

$P(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)^3 \cdot (x-3)$

RAÍCES $= (x+2)^2 \cdot (x-1)^3 \cdot (x-3) = 0$

$x+2=0$; $x-1=0$; $x-3=0$

$x=-2$; $x=1$; $x=3$

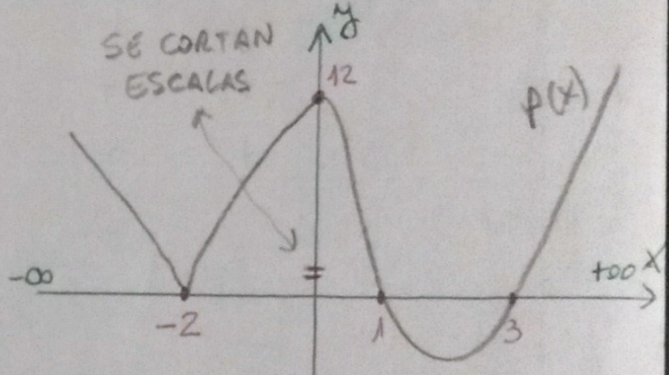
MULTIPLICIDAD $m=2$; $m=3$; $m=1$

ORDENADA:

$P(0) = (0+2)^2 \cdot (0-1)^3 \cdot (0-3)$

$P(0) = 4 \cdot -1 \cdot -3$

$\boxed{P(0) = 12}$



$C^+ = (-\infty;-2) \cup (-2;1) \cup (3;+\infty)$

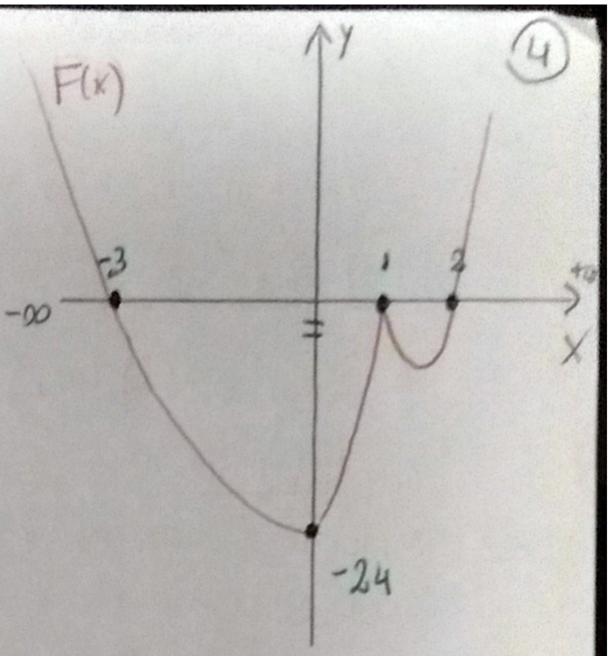
$C^- = (1;3)$

$C^0 = \{-2;1;3\}$

TAREA: COPIAR LA TEORÍA Y LOS 3 EJERCICIOS RESUELTOS

TODOS DEBEN LLEVAR UNA CARPETA. LA MISMA HASTA LA FECHA INCLUYE TPN°1 ; TEORÍA + TPN°2 ; ~~TEORÍA~~ EJERCICIOS RESUELTOS + TPN°3 Y LA CLASE DE HOY

D) $F(x) = (x-2)^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+3)$



RAÍCES = $(x-2)^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+3) = 0$

$x-2=0$	$x-1=0$	$x+3=0$
$x=2$	$x=1$	$x=-3$
MULTIPLICIDAD $m=3$	$m=2$	$m=1$

ORDENADA: $F(0) = (0-2)^3 \cdot (0-1)^2 \cdot (0+3)$

$F(0) = (-8) \cdot 1 \cdot 3$

$F(0) = -24$

C^+, C^- y C^0 SIEMPRE LEERLO RESPECTO DEL EJE "X". NO INVOLUCRAR JAMÁS LA ORDENADA

¿CÓMO GRAFICO?

PASO 1 = MARCO LAS RAÍCES SOBRE EL EJE "X" Y LA ORDENADA SOBRE EL EJE "Y". SI ES NECESARIO CORTO ESCALAS EN EJE "Y"

PASO 2 = EN "ROJO" COMIENZO A DIBUJAR LA FUNCIÓN. COMIENZO POR EL -24 (ORDENADA) Y ME APROXIMO A LA PRIMERA RAÍZ A LA DERECHA (1). EN EL 1 PREGUNTO ¿CUÁL ES LA MULTIPLICIDAD DE LA RAÍZ 1? MIRO Y ES "2". CUANDO LA RAÍZ ES PAR LA FUNCIÓN REBOTA CONTRA EL EJE X Y BUSCO LA SIGUIENTE RAÍZ (EN EL DIBUJO LA FUNCIÓN REBOTA EN EL EJE X Y VUELVE AL EJE X EN 2). EN LA RAÍZ 2 PREGUNTO ¿CUÁL ES LA MULTIPLICIDAD DE LA RAÍZ 2? MIRO Y ES "3". CUANDO LA RAÍZ TIENE MULTIPLICIDAD IMPAR LA FUNCIÓN CORTA AL EJE X (EN EL DIBUJO LA FUNCIÓN SE VA HACIA ARRIBA). AHORA DEL -24 BUSCO LA RAÍZ A LA IZQUIERDA Y HAY UNA EN -3. ¿CUÁL ES SU MULTIPLICIDAD? 1. ENTONCES ES IMPAR Y CORTA AL EJE X (EN EL DIBUJO LO CORTA Y SUBE)

CAMPOS DE POSITIVIDAD: $C^+ = (-\infty;3) \cup (2;+\infty)$ SON LOS INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN ESTÁ DIBUJADA POR ENCIMA DEL EJE X. USAR PARÉNTESIS

CAMPOS DE NEGATIVIDAD: $C^- = (-3;1) \cup (1;2)$ SON LOS INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN ESTÁ DEBAJO DEL EJE "X". USAR PARÉNTESIS.

CAMPOS DE CEROS = $C^0 = \{-3;1;2\}$ SON LAS RAÍCES (USAR CLAVES {} JAMÁS PARÉNTESIS ( ))

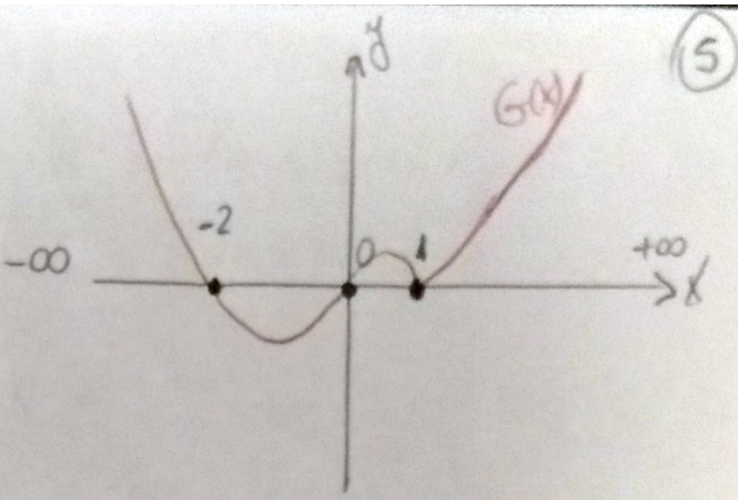
E) $G(x) = X \cdot (X-1)^2 \cdot (X+2)^3$

RAÍCES: $X=0$ | $X-1=0$, $X=1$ | $X+2=0$, $X=-2$

MULTIPLICIDAD $m=1$ | $m=2$ | $m=3$

ORDENADA $= G(0) = 0 \cdot (0-1)^2 \cdot (0+2)^3$

$G(0) = 0$



PASO 1: MARCO LAS RAÍCES Y ORDENADA.

PASO 2: EL PROBLEMA DEL EJERCICIO ES QUE UNA RAÍZ Y ORDENADA COINCIDEN EN CERO Y NO SE PUEDE APLICAR LO DEL EJERCICIO ANTERIOR. DEBEN APLICAR EL CUADRO DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD.

FORMULA FACTORIZADA

INTERVALOS EJE "X"	X	$(X-1)^2$	$(X+2)^3$	$G(x)$
$(-\infty; -2)$	−	+	−	+
$(-2; 0)$	−	+	+	−
$(0; 1)$	+	+	+	+
$(1; +\infty)$	+	+	+	+

AQUÍ DEBO INDICAR CADA INTERVALO. COMIENZAN EN $-\infty$ Y SE DETIENEN EN CADA RAÍZ. POR ELLO, LOS INTERVALOS SON $(-\infty;-2)$ $(-2;0)$ $(0;1)$ $(1;+\infty)$ Y EN LA PARTE SUPERIOR COPIO LA FÓRMULA FACTORIZADA QUE ES $X \cdot (X-1)^2 \cdot (X+2)^3$ CADA FACTOR OCUPA UNA COLUMNA.

AHORA ANALIZO EL SIGNO DE CADA INTERVALO EN CADA FACTOR. PARA ELLO A LAS "X" DEBO REEMPLAZARLA POR UN VALOR DEL INTERVALO

	X	$(X-1)^2$	$(X+2)^3$	
$(-\infty;-2)$ ELIJO −3	−3 NEGATIVO	$(-3-1)^2$ +16 POSITIVO	$(-3+2)^3$ −1 NEGATIVO	COMO EN ESTE INTERVALO TENGO DOS NEGATIVOS EL SIGNO DE G(x) ES +
$(-2;0)$ ELIJO −1	−1 NEGATIVO	$(-1-1)^2$ 4 POSITIVO	$(-1+2)^3$ 1 POSITIVO	COMO EN ESTE INTERVALO TENGO UN NEGATIVO EL SIGNO DE G(x) ES −
$(0;1)$ ELIJO 0,5	0,5 POSITIVO	$(0,5-1)^2$ 0,25 POSITIVO	$(0,5+2)^3$ 15,625 POSITIVO	CERO NEGATIVOS ENTONCES G(x) ES +
$(1;+\infty)$ ELIJO 2	2 POSITIVO	$(2-1)^2$ 1 POSITIVO	$(2+2)^3$ 64 POSITIVO	CERO NEGATIVOS ENTONCES G(x) ES +

POR ÚLTIMO, CON CADA SIGNO DE G(x) GRAFICO: SI ES + DIBUJO SOBRE EJE X; SI ES − DIBUJO DEBAJO EJE X

ACTIVIDAD N° 4 = GRAFICAR

A) $F(x) = (x-4) \cdot (x+3) \cdot (x-2)^2$

B) $G(x) = (x+1)^2 \cdot (x+2)^3 \cdot (x-3)$

C) $H(x) = (x-2)^3 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+3)$

D) $I(x) = x \cdot (x+1)^3 \cdot (x-2)^2$